ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LƯU PHƯƠNG THẢO

VỀ MÔĐUN COHEN-MACAULAY SUY RỘNG CHÍNH TẮC VÀ MỘT SỐ QUỸ TÍCH KHÔNG COHEN-MACAULAY TRÊN VÀNH NOETHER ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LƯU PHƯƠNG THẢO

VỀ MÔĐUN COHEN-MACAULAY SUY RỘNG CHÍNH TẮC VÀ MỘT SỐ QUỸ TÍCH KHÔNG COHEN-MACAULAY TRÊN VÀNH NOETHER ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 9 46 01 04

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn
TS. Trần Nguyên An

THÁI NGUYÊN - 2020

Tóm tắt

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán Noether địa phương, M là R-môđun hữu hạn sinh có chiều Krull $\dim M = d$. Quỹ tích không Cohen-Macaulay của M, ký hiệu $\mathrm{nCM}(M)$, là tập các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R sao cho $M_{\mathfrak{p}}$ không là Cohen-Macaulay. Khi R là thương của một vành Gorenstein địa phương, M có môđun chính tắc K_M. Ta nói M là Cohen-Macaulay chính tắc (tương ứng Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc) nếu môđun chính tắc K_M của M là Cohen-Macaulay (tương ứng Cohen-Macaulay suy rộng).

Luận án nghiên cứu về môđun Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc và một số quỹ tích không Cohen-Macaulay: quỹ tích không Cohen-Macaulay $\mathrm{nCM}(M)$, quỹ tích không Cohen-Macaulay $\mathrm{nCM}(K_M)$, và quỹ tích không Cohen-Macaulay theo chiều $> s$ của M, ký hiệu là $\mathrm{nCM}_{>s}(M)$. Trong luận án, chúng tôi đặc trưng cấu trúc của môđun Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc. Chúng tôi làm rõ mối quan hệ giữa quỹ tích không Cohen-Macaulay của môđun chính tắc K_M và quỹ tích không Cohen-Macaulay của M. Chúng tôi cũng nghiên cứu tập iđêan nguyên tố gắn kết và chiều của môđun đối đồng điều địa phương Artin qua chuyển phẳng, từ đó đưa ra mối liên hệ về chiều của các quỹ tích không Cohen-Macaulay theo chiều $> s$ qua chuyển phẳng.

Luận án được chia thành 4 chương. Chương 1 nhắc lại một số kiến thức cơ sở về môđun Cohen-Macaulay, môđun Cohen-Macaulay suy rộng, môđun Artin, môđun chính tắc và môđun khuyết.

Trong Chương 2, chúng tôi giới thiệu khái niệm hệ tham số chính tắc, chỉ ra mối quan hệ giữa hệ tham số chính tắc và hệ tham số chuẩn

tắc. Chúng tôi thiết lập đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc thông qua hệ tham số chính tắc và cải tiến các kết quả trước đây về cấu trúc của môđun Cohen-Macaulay suy rộng chính tắc.

Trong Chương 3, chúng tôi đưa ra mối liên hệ giữa chiều của quỹ tích không Cohen-Macaulay của môđun M và chiều của quỹ tích không Cohen-Macaulay của môđun chính tắc K_M. Đặc biệt hơn, chúng tôi chỉ ra rằng, ngoài mối quan hệ bao hàm $\mathrm{nCM}(K_M) \subseteq \mathrm{nCM}(M)$ thì hai quỹ tích này hầu như là độc lập với nhau.

Trong Chương 4, chúng tôi làm rõ sự thay đổi của tập iđêan nguyên tố gắn kết và chiều của môđun đối đồng điều địa phương Artin qua chuyển phẳng $\varphi : R_{\mathfrak{p}} \to \widehat{R}_{\mathfrak{P}}$, trong đó $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\widehat{R})$ và $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap R$. Sử dụng các kết quả này, chúng tôi đưa ra công thức liên hệ giữa chiều của các quỹ tích không Cohen-Macaulay theo chiều $> s$.

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả trước khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Tác giả

Lưu Phương Thảo

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn tới cô giáo kính yêu của tôi - GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Cô đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn tôi từ những ngày đầu tiên tập làm nghiên cứu khoa học. Với tất cả niềm đam mê nghiên cứu khoa học và tâm huyết của người thầy, cô đã truyền thụ cho tôi không chỉ về tri thức toán học mà còn về phương pháp nghiên cứu, cách phát hiện và giải quyết vấn đề. Cô là tấm gương sáng cho lớp học trò chúng tôi phấn đấu noi theo về những nỗ lực vượt qua khó khăn để đạt tới thành công.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo hướng dẫn thứ hai của tôi - TS. Trần Nguyên An. Thầy đã luôn quan tâm, động viên, khích lệ và hỗ trợ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu.

Tôi xin trân trọng cảm ơn GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường. Thầy là người đầu tiên giảng dạy cho tôi những kiến thức về Đại số giao hoán từ những ngày tôi còn là học viên cao học. Cho tới nay, khi tôi học nghiên cứu sinh, thầy vẫn luôn quan tâm, giúp đỡ và động viên tôi trong suốt quá trình học tập.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng đào tạo Sau đại học, Khoa Toán Tin, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi học tập.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã cho tôi cơ hội được đi học tập và nghiên cứu. Đặc biệt, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo và đồng nghiệp trong Tổ Hình học - Đại số, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm đã quan tâm động viên và giúp đỡ nhiều mặt trong thời gian tôi làm nghiên cứu sinh.

Tôi xin cảm ơn chị Nguyễn Thị Kiều Nga, em Trần Đỗ Minh Châu cùng các anh chị em trong nhóm seminar Đại số Đại học Thái Nguyên đã luôn đồng hành cùng tôi, động viên, khích lệ, chia sẻ với tôi trong học tập cũng như trong cuộc sống.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới những người thân trong gia đình của mình, đặc biệt là Bố mẹ, Chồng và hai Con trai yêu quý, đã luôn động viên, chia sẻ khó khăn và luôn mong mỏi tôi thành công. Đó là nguồn động viên rất lớn, giúp tôi vượt qua khó khăn để tôi có thể hoàn thành luận án này.

Tác giả

Lưu Phương Thảo

Mục lục

Mở đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán Noether địa phương với $\mathfrak{m}$ là iđêan cực đại duy nhất, M là R-môđun hữu hạn sinh có chiều Krull $\dim M = d$.

Ta luôn có mối liên hệ giữa hai bất biến độ sâu và chiều của M được cho bởi công thức $\operatorname{depth} M \leq \dim M$. Nếu $\operatorname{depth} M = \dim M$ thì M được gọi là *môđun Cohen-Macaulay*. Khi R là R-môđun Cohen-Macaulay, thì ta nói R là *vành Cohen-Macaulay*. Lớp môđun Cohen-Macaulay và các mở rộng của chúng đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới. Cấu trúc của những lớp môđun này đã được đặc trưng qua hầu hết lý thuyết quen biết của Đại số giao hoán (số bội, đối đồng điều địa phương, địa phương hóa, đầy đủ hóa,...). Các môđun này xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học như Đại số đồng điều, Lý thuyết bất biến, Tổ hợp và Hình học đại số.

Luận án liên quan đến hai hướng mở rộng lớp môđun Cohen-Macaulay sau đây. Mở rộng thứ nhất là dựa theo hiệu số $I(\underline{x}; M)$ giữa độ dài $\ell(M/\underline{x}M)$ và số bội $e(\underline{x}; M)$ với $\underline{x}$ là hệ tham số của M. Chú ý rằng M là Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu $I(\underline{x}; M) = 0$ với một (hoặc với mọi) hệ tham số $\underline{x}$. Từ đó, một giả thuyết được đặt ra bởi D. A. Buchsbaum [11] năm 1965 như sau: $I(\underline{x}; M) := \ell(M/\underline{x}M) - e(\underline{x}; M)$ *là một hằng số không phụ thuộc vào hệ tham số* $\underline{x}$ *của* M. Câu trả lời phủ định cho giả thuyết này được W. Vogel và J. Stückrad [49] đưa ra năm 1973, và họ đã nghiên cứu lớp vành và môđun thỏa mãn điều kiện của giả thuyết, được gọi là *vành và môđun Buchsbaum* [40]. Năm 1978, N. T. Cường, P. Schenzel và N. V. Trung [46] đã giới thiệu một mở rộng của lớp môđun Buchsbaum, đó là lớp môđun M thỏa mãn điều kiện $\sup I(\underline{x}; M) < \infty$, trong đó cận trên lấy theo mọi hệ tham số $\underline{x}$ của M, và họ gọi chúng là *môđun Cohen-Macaulay suy* *rộng*. Ngày nay, khái niệm môđun Buchsbaum và môđun Cohen-Macaulay suy rộng đã trở nên rất quen biết trong Đại số giao hoán. Tiếp tục mở rộng theo hướng này, ta được lớp môđun Cohen-Macaulay theo chiều $> s$, với $s \geq -1$ là số nguyên (xem [43]). Chú ý rằng M là Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu nó là Cohen-Macaulay theo chiều > -1. Khi R là thương của vành Cohen-Macaulay, thì M là Cohen-Macaulay suy rộng nếu và chỉ nếu M là Cohen-Macaulay theo chiều > 0.

Hướng mở rộng thứ hai của lớp môđun Cohen-Macaulay là dựa vào cấu trúc của môđun chính tắc, trong trường hợp R là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein địa phương $(R', \mathfrak{m}')$ chiều n'. Với mỗi số nguyên $i \geq 0$, đặt $K^i_M := \operatorname{Ext}^{n'-i}_{R'}(M, R')$. Khi đó K^i_M là R-môđun hữu hạn sinh và được gọi là *môđun khuyết thứ* i của M. Đặc biệt, với $i = d$ ta ký hiệu $K_M := K^d_M$ và gọi là *môđun chính tắc* của M. Khi K_M là Cohen-Macaulay, ta nói M là *Cohen-Macaulay chính tắc*. Chú ý rằng nếu M là môđun Cohen-Macaulay thì K_M cũng là môđun Cohen-Macaulay. Vì thế, lớp môđun Cohen-Macaulay chính tắc là một mở rộng của lớp môđun Cohen-Macaulay. Khái niệm vành và môđun Cohen-Macaulay chính tắc xuất phát từ bài toán sau: Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là một miền nguyên, địa phương. Ký hiệu $Q(R)$ là trường các thương của R. Câu hỏi tự nhiên đặt ra là tồn tại hay không một vành trung gian $R \subseteq B \subseteq Q(R)$ sao cho B là R-môđun hữu hạn sinh và B là vành Cohen-Macaulay? Vành B như trên (nếu tồn tại) được gọi là Macaulay hóa song hữu tỷ của R. Đây là bài toán quan trọng trong Đại số giao hoán. Năm 2004, P. Schenzel [36] đã chứng minh rằng một miền nguyên Noether địa phương R có Macaulay hóa song hữu tỷ nếu và chỉ nếu R là vành Cohen-Macaulay chính tắc. Năm 2006, L. T. Nhàn [31] đã đưa ra đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay chính tắc thông qua tính triệt tiêu của độ dài thặng dư của các môđun đối đồng điều địa phương ứng với hệ tham số là f-dãy chặt giới thiệu trong